

Διαγώνισμα στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Θέμα Α

Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, να γράψετε στο κουτί το γράμμα Σ αν τη θεωρείτε Σωστή ή το Λ αν τη θεωρείτε Λανθασμένη.

α) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ τότε $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.

β) $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$

γ) $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$

δ) Το $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα.

ε) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

στ) Για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$

ζ) Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

η) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$, τότε $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) < 90^\circ$

| |
|--|
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |

μονάδες 8x2

Θέμα Β

B 1. Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$, $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{6}$, και $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\gamma}}) = \pi$.

μονάδες 9

Να αντιστοιχήσετε κάθε εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη (Α) με την τιμή του που βρίσκεται στη στήλη (Β).

| στήλη Α | στήλη Β |
|-----------------------------------|-----------------------|
| $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ | - 1 |
| $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ | 0 |
| $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| | $\frac{1}{2}$ |

B 2. Δίνεται το τραπέζιο του διπλανού σχήματος.

μονάδες 4x5

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ είναι ίσο με:

i. 2 ii. -2 iii. 4 iv. -4 v. 8 vi. -8

β) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{BG}$ είναι ίσο με:

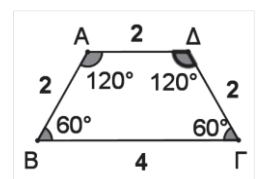
i. 2 ii. -2 iii. 4 iv. -4 v. 8 vi. -8

γ) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AD} \cdot \vec{GB}$ είναι ίσο με:

i. 2 ii. -2 iii. 4 iv. -4 v. 8 vi. -8

δ) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{DG}$ είναι ίσο με:

i. 2 ii. -2 iii. 4 iv. -4 v. 8 vi. -8



Θέμα Γ

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,-2)$, $\Gamma(-3,4)$ και έστω M το μέσο τη πλευράς $B\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A .

μονάδες 6

β) Να βρείτε το $|\overline{AM}|$.

μονάδες 4

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $M\hat{A}B$.

μονάδες 7

δ) Να βρείτε σημείο K του επιπέδου για το οποίο το $\Pi = \overline{KA}^2 + \overline{KB}^2$ γίνεται ελάχιστο. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης Π ;

μονάδες 5

ε) Να βρείτε διάνυσμα \vec{w} του οποίου ο φορέας να διχοτομεί τη γωνία $A\Gamma B$ και να έχει μέτρο ίσο

$$\frac{\sqrt{100 - 10\sqrt{2}}}{7}.$$

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$. Δίνεται επίσης παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με

$\overline{AB} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\overline{A\Delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} = 120^\circ$.

μονάδες 8

β) $|\overline{A\Gamma}| = 3$

μονάδες 6

γ) $\Gamma\hat{A}\Delta = 90^\circ$

μονάδες 7

δ) $\Gamma\hat{K}\Delta > 90^\circ$, όπου K το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.

μονάδες 7

Καλή επιτυχία!