

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΘΕΜΑ 1^ο: @ Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0 \text{ με αμέραιους συντελεστές}$$

(10M) Αν ο αμέραιος $p \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο p είναι διαιρετός του συντελεστή a_0 .

β) Να χαρακτηρίσετε ταίρια αληθώς ως Σ (σωστό) ή Λ (λανθασμένο).

(i) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παραγοντά το $x-p$, τότε $P(0)=p$ Σ Λ

(15M) (ii) Η εξίσωση $3x^4 + 7x^2 + 8x + 1 = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό -1 Σ Λ

(iii) Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(p) \neq 0$ τότε το $P(x)$ χωρίζεται $P(x) = (x-p)\pi(x) + v$ Σ Λ

(iv) Αν το $P(x)$ έχει παραγοντά το $(x-p)^2$, τότε $P(p)=0$ Σ Λ

(v) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου x^2+1 με το πολυώνυμο $-x$ είναι 1 με 1 Σ Λ

ΘΕΜΑ 2^ο: Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = ax^4 - 11x^3 + bx^2 + 32x - 1$ όπου a, b πραγματικοί αριθμοί.

(9M) α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παραγοντές το $x-1$ και το $x+2$, να αποδείξετε ότι $a=2$ και $b=-11$

β) Για $a=2$ και $b=-11$

(8M) (i) να βρείτε το υπόλοιπο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ με το γινόμενο $(x-1)(x+2)$,

(8M) (ii) να λύσετε την εξίσωση $\pi\left(\frac{x}{3x-1}\right) = 0, x \neq \frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ 3^ο : Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - (a+1)x + b-3, \text{ όπου } a, b \in \mathbb{R}.$$

(10M) (α) Αν το $P(x)$ έχει ως παράγοντα το $(x+2)^2$,
να αποδείξετε ότι $a=3$ και $b=-5$.

(5M) (β) Για τις τιμές των a και b ως παραπάνω (α)
(i) να γράψετε το αλγόριθμο $\pi(x)$ της διαίρεσης
του $P(x)$ με το $x+2$,

(5M) (ii) να γράψετε το αλγόριθμο $\varphi(x)$ της διαίρεσης του
 $P(x)$ με το $(x+2)^2$,

(5M) (iii) να λύσετε την εξίσωση $(\pi(x))^2 + 8 \cdot \varphi(x) = 0$

ΘΕΜΑ 4^ο : (α) Αν $a^3 + b^3 + \gamma^3 = 3ab\gamma$ και για το ως άνω

(6M) πολυώνυμο $P(x) = ax^4 + bx^2 + \gamma - 1$ ισχύει $P(-1) = 2$, να υπολο-
γίσετε ως $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$.

(6M) (β) Η εξίσωση $x^3 + x^2 + ax + b = 0$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$,
έχει ρίζα των ακεραίων ρ . Αν $\rho^2 + a = 0$, δείξτε ότι
όλες οι ρίζες της είναι ακέραιες και να τις προσ-
διορίσετε.

(6M) (γ) Έστω η εξίσωση $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$, με
 $|a| \geq 2$. Αν ρ είναι ρίζα της εξίσωσης δείξτε ότι:
 $|\rho| < 1 + |a|$

(7M) (δ) Να λύσει η εξίσωση :

$$\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{x-4}\right)^2 = 20$$

* Ταυτότητα Euler: $a^3 + b^3 + \gamma^3 - 3ab\gamma = \frac{1}{2}(a+b+\gamma)[(a-b)^2 + (b-\gamma)^2 + (\gamma-a)^2]$
• Αν $a^3 + b^3 + \gamma^3 = 3ab\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+\gamma=0 \\ a=b=\gamma \end{cases}$ (εξίσωση για
το θέμα 4α)