(Θ.R, Θ.Μ.Τ κ Συνέπειες)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΤΑΞΗ: Γ' Επώνυμο: .... Όνομα: ....

ΘΕΜΑΤΑ

Ημερ: ....

ΘΕΜΑ Α Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ (Μ. 7)

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού. (Μ. 4)

Α3. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Rolle. (Μ. 4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

ⓐ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[α,β]$ κ ισχύει $f(α)-f(β)=0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ\in(α,β)$, τέτοιο, ώστε $f'(ξ)=0$

ⓑ Έστω $A=\mathbb{R}-\{0\}$ και η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=0$, για κάθε $x\in A$. Τότε η f είναι σταθερή στο Α.

ⓒ Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,β]$, παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ και $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(α,β)$, τότε $f(α)\neq f(β)$

ⓓ Έστω f,g συναρτήσεις συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος Δ. Τότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in Δ$.

ⓔ Αν $α<β$ και $f(α)<f(β)$, τότε υπάρχει $ξ\in(α,β)$ τέτοιο, ώστε $f'(ξ)>0$

(Μ. 10)

ΘΕΜΑ Β Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(1)=2+f(0)$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2)}{h}=6$

Β1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=2$ (Μ.8)

Β2. Να δείξετε ότι $f'(2)=2$ (Μ.8)

Β3. Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$, να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. (Μ.9)

ΘΕΜΑ Γ Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f(x)=x\,(f'(x)-1),\ \text{για κάθε } x>0$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\ln x$, $x>0$ (Μ.8)

Γ2. Αν $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $\alpha<\beta$ και ισχύει $\alpha^{\alpha}=\beta^{\beta}$, να αποδείξετε ότι $\beta\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ (Μ.8)

Γ3. Αν x_1,x_2 $(x_1<x_2)$ δύο θετικές ρίζες της εξίσωσης $3f(x)+1=0$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $3x_0f'(x_0)=1+3f(x_0)$ (Μ.9)

ΘΕΜΑ Δ Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f'(x)=1+(1-e^{x})e^{f(x)-x},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $e^{x}>x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μ.8)

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)=x-\ln(e^{x}-x)$, $x\in\mathbb{R}$. (Μ.9)

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $3\alpha^{2}f(\alpha)=(1-\alpha^{3})f'(\alpha)$. (Μ.8)